L'espace de Travail Mathématique et ses genèses

Alain Kuzniak

ALAIN KUZNIAK

L'ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET SES GÉNÈSES

Abstract. The Mathematical Work Space and its Geneses
In the paper, the notion of mathematical work space is based on some characteristics brought out by previous studies on geometrical work. The mathematical work space is structured on two fundamental levels: the epistemological level in relationship to mathematical contents and the cognitive level linked to visualization, construction and proof processes. To articulate both levels and come into mathematical work three main geneses are considered: a semiotic genesis, an instrumental genesis and a discursive genesis conveying reasoning.

Résumé. Dans cet article, la notion d'espace de travail mathématique est introduite à partir de certaines caractéristiques que les études sur le travail géométrique ont permis de dégager. Deux niveaux fondamentaux structurent l'espace de travail mathématique : un niveau épistémologique qui s'attache au contenu mathématique et un niveau cognitif relié aux processus de visualisation, de construction et de preuve. Pour articuler ces deux niveaux et permettre la réalisation du travail mathématique, trois genèses principales sont retenues : une genèse sémiotique, une genèse instrumentale et enfin une genèse discursive supportant le raisonnement.

Mots-clés. Travail mathématique, genèse instrumentale, genèse sémiotique, genèse discursive, paradigmes.

Introduction

La rénovation de l'enseignement des mathématiques initiée à partir des années 70 en réaction à la fois à la réforme des mathématiques modernes et à l'enseignement classique, a mis l'activité de l'élève au cœur des préoccupations du système d'enseignement. N'étant plus seulement destiné à absorber des connaissances mais invité à les construire et à les organiser, l'élève acquérait d'un seul coup un statut proche du chercheur permettant à juste titre de le qualifier de mathématicien en herbe. Dans le même temps, une réflexion plus approfondie sur la nature de l'apprentissage conduisait également à reconsidérer le travail de l'élève.

L'insistance sur l'activité de l'élève a mis en relief deux aspects à la fois complémentaires et très différents du travail de l'élève. D'une part, il s'agit de considérer son travail d'apprenant dans le cadre scolaire avec des professeurs, des devoirs, des évaluations en contexte social. D'autre part, il importe de s'assurer qu'un travail de nature mathématique est effectivement produit par l'élève. Dans cet article, nous nous attacherons essentiellement à ce deuxième point et notre contribution visera à préciser la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) dans la continuité de nos recherches sur le travail géométrique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 9 – 24.

Nous commencerons par déterminer ce que nous entendons par travail mathématique puis nous reviendrons ensuite sur certains éléments caractéristiques des Espaces de Travail Géométrique en envisageant leur possible extension dans le cadre plus général d'un Espace de Travail Mathématique. Il s'agit d'une première contribution exploratoire complétée notamment sur les domaines autres que géométrique par certaines des contributions de cet ouvrage.

1. Le travail mathématique dans une perspective didactique

1.1. L'activité du mathématicien comme modèle pour le travail mathématique

C'est un des apports majeurs de la philosophie et de l'histoire des mathématiques que de ne plus considérer les mathématiques comme une science intemporelle et déconnectée de la société qui a permis leur développement. L'introduction par Reichenbach (1938) des contextes de découverte et de justification a mis en évidence deux facettes du travail du mathématicien. Le premier contexte précise les conditions qui permettent la découverte et l'élaboration des concepts à partir de la résolution des problèmes. Le second s'attache à la façon dont un résultat est présenté, défendu et justifié dans la communauté qui entoure le chercheur. Pour Reichenbach, le contexte de découverte ne relève pas à proprement parler du pur domaine scientifique et il insiste sur une approche de nature psychologique dans la filiation d'essais sur l'invention comme celui d'Hadamard (1908). Cependant à la suite des travaux menés, entre autres, par Lakatos et Kuhn, on peut aussi enrichir ce contexte de découverte, en l'envisageant de manière plus sociologique comme un contexte destiné à favoriser le travail des mathématiciens, *ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques* (Thurston, 1995, p. 29).

De manière plus précise, Giaquinto (2005) distingue plusieurs phases dans l'activité globale du mathématicien : la découverte, l'explication, la justification et les applications. Dans chacune de ces phases, il repère des moments qui permettent de passer de l'élaboration du savoir mathématique à sa diffusion la plus large dans la communauté des mathématiciens et au-delà de toucher professeurs et étudiants. Il insiste aussi sur la nécessité pour un chercheur de s'approprier les découvertes des autres chercheurs. Dans la conception classique de l'enseignement, l'élève est essentiellement concerné par le travail d'appropriation mais ce n'est plus le cas si l'on souhaite le rendre plus actif dans la construction de son savoir.

1.2. L'œuvre mathématique et son style

Définir les mathématiques à partir de l'activité des mathématiciens oblige à porter le regard sur les résultats de ce travail pour mieux comprendre la nature et les contenus des mathématiques. Pour cela, il faudra, comme le suggère Granger (1963), étudier l'œuvre, fruit du travail élaboré par les mathématiciens. Cette œuvre est une mise en forme de concepts abstraits qui nécessite une codification du discours. Granger appelle *style* la manière particulière de présenter la connaissance rationnelle en la soumettant à des normes codifiées qui donnent aux objets un sens déterminé. Ces normes contribuent à fixer l'orientation du travail sur la résolution des problèmes. Elles permettent d'exclure certaines pratiques en limitant les possibilités d'interprétation et donc d'exploration du lecteur ou de l'étudiant. Ainsi, la notion de style que nous utilisons, n'est pas désincarnée et uniquement rhétorique. Elle doit cependant être clairement distinguée de celle de style de pensée introduite par Fleck ou Crombie (Hacking, 2002-2003) dans le cadre d'études plus générales sur la pensée scientifique. Pour ces auteurs, le style mathématique apparaît comme un style scientifique particulier que Hacking précise grâce à la notion de style de raisonnement scientifique avec l'idée de style géométrique et de style combinatoire. Le style mathématique se différencie ainsi d'autres styles scientifiques comme le style expérimental du laboratoire. De fait, nous verrons plus loin (1.4.) que la notion de paradigme nous évite la référence aux styles de pensée.

Les objets et les résultats produits par le travail mathématique se répartissent en domaines qui structurent la recherche en mathématiques et permettent de rendre compte de la diversité de l'activité mathématicienne.

1.3. Domaines mathématiques

La différenciation des domaines mathématiques est liée à la nature des objets étudiés mais plus fondamentalement il est aussi nécessaire de connaître les fondements épistémologiques de ces différences. Pour répondre à cette question dans le cas de la géométrie (Kuzniak, 2006), nous avons retenu l'idée de problème épistémologique développé par Desanti (1975). Ces problèmes sont définis comme des problèmes surgissant à l'intérieur des sciences et qui ne peuvent être résolus à l'intérieur du système formé par ces mêmes sciences. En s'appuyant sur ses travaux sur les fondements de l'analyse, Desanti distingue ensuite plusieurs niveaux de problèmes. Ces niveaux dépendent de leur relation plus ou moins étroite à l'objet même de la théorie. Dans le cas de la géométrie élémentaire considérée comme la science de l'espace, le premier problème à envisager est justement celui de la relation de la géométrie avec l'espace. Un autre type de problèmes plus abstraits, de deuxième niveau, porte sur la nature des objets et des relations entre les constituants du modèle mathématique, sur son optimisation, sur sa cohérence formelle. Dans une perspective didactique sur la géométrie, ces deux types de problèmes renvoient à une mise en place de la géométrie enseignée vue soit comme le modèle de l'espace, soit comme un exemple de système déductif complet.

Pour nous en tenir aux thèmes les plus travaillés en didactique des mathématiques, en plus de la géométrie apparaissent un certain nombre de domaines : arithmétique, algèbre, analyse, probabilités et statistiques. Chacun de ces domaines sera relié à des thèmes non mathématiques comme le dénombrement, la symbolisation, la généralisation, la variation, le hasard, la décision. Cette liste n'épuise pas le sujet mais elle montre déjà la complexité et l'hétérogénéité des objets en jeu lorsqu'on se préoccupe du travail mathématique en général.

1.4. L'approche par paradigmes

Les domaines mathématiques se constituent par l'agrégation et l'organisation des connaissances et, comme le signale Brousseau (2002), cette organisation ne correspondra pas nécessairement à celle qui, ensuite, sera mise en œuvre dans l’enseignement. Un domaine mathématique va faire l'objet de différentes interprétations lorsqu'il sera l'objet d'une transposition didactique pour être enseigné et ces interprétations dépendront aussi des institutions scolaires. Le cas de la géométrie montre bien qu'il n'est pas possible d'utiliser de manière univoque le terme de géométrie tant ce mot revêt des significations différentes qui dépendent à la fois de l'évolution des mathématiques et des institutions scolaires. Pour prendre en compte cette diversité de points de vue, nous avons introduit dans le champ de la didactique de la géométrie une approche par les paradigmes.

L’idée de paradigme géométrique s’inspire de la notion de paradigme introduite par Kuhn (1962) dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques. Un paradigme désignera pour nous l’ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. L'accès au paradigme se fera par la rencontre des œuvres des mathématiciens et donc de leur style et passera par la résolution d'un certain nombre de problèmes caractéristiques que Kuhn qualifie d'exemplaires.

1.5. Travail mathématique et résolution de problèmes

La résolution des problèmes occupe une place essentielle dans le travail des mathématiciens et aussi dans l'enseignement des mathématiques. Par les problèmes, les élèves et les étudiants vont mettre en œuvre des savoirs et des techniques dépendants du paradigme retenu. Il est essentiel d'observer les tâches demandées qui permettent à la fois de décrire le travail d'un point de vue mathématique mais aussi d'un point de vue didactique.

La notion de tâche s'est imposée en didactique des mathématiques et on peut l'envisager à travers deux approches, selon nous complémentaires : celle des praxéologies (Bosch & Chevallard, 1999) et celle de la double approche, ergonomique et didactique (Robert, 2008). Dans le premier cas, une étude fine des types de tâches avec leur cortège de techniques et de savoirs théoriques, permet de dégager la structuration du domaine mathématique. La deuxième s'intéresse davantage à l'écart entre ce qui est attendu de l'élève et ce qu'il réalise effectivement, elle nécessite une observation des pratiques géométriques et mathématiques proposées dans le cadre scolaire et dans des cadres professionnel et quotidien si l'on tient à s'attacher à l'usage des mathématiques dans la société.

2. La notion d'espace de travail dans le cadre de la didactique de la géométrie

Pour avancer vers la notion générale d'Espace de Travail Mathématique, nous allons nous appuyer sur nos recherches en didactique de la géométrie qui nous ont conduits à introduire les Espaces de Travail Géométrique (ETG). Nous avons appelé *espace de travail géométrique*, un environnement organisé pour permettre le travail des personnes résolvant des problèmes géométriques. Ces individus pourront être suivant les cas un expert idéal (le mathématicien professionnel) ou bien un étudiant ou un élève. Les problèmes ne font pas partie de l'espace de travail mais ils en sont la raison d'être et aussi l'activateur. Ils en sont la raison d'être car l'ETG doit être un moyen pour traiter et résoudre les problèmes. Ils en sont aussi un activateur car ils vont permettre la structuration tant institutionnelle que personnelle de l'ETG tel que nous le concevons.

Les architectes définissent les espaces de travail comme des lieux à construire pour que l’utilisateur puisse y exercer au mieux son travail (Lautier, 1999). Pour aider à la conception d'un espace de travail, Lautier propose de le penser suivant trois grands axes : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l’espace et enfin une représentation qui prend en compte la façon dont les utilisateurs intègrent cet espace. Il n'est naturellement pas question de reprendre sans modifications cette structuration orientée vers le travail productif, mais il nous semble nécessaire de bien avoir à l'esprit ces différentes dimensions, certaines étant matérielles et d'autres à la fois mentales et intellectuelles.

2.1. Le niveau des composantes et sa genèse épistémologique

Pour définir l'espace de travail géométrique, nous avons introduit trois composantes caractéristiques de l'activité géométrique dans sa dimension purement mathématique. Ces trois composantes en interaction dans un contexte donné sont les suivantes :

- un espace réel et local comme support matériel avec un ensemble d'objets concrets et tangibles ;
- un ensemble d'artefacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels ;
- un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés.

Ces composantes ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées avec un but déterminé ; qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique ; d'où l'appellation de plan épistémologique que nous sommes enclins à donner à ce premier niveau. Dans notre cadre théorique, la notion de paradigmes oriente et structure l'organisation de ce premier niveau. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, ce fait débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Il faudra aussi expliciter le cadre théorique mathématique qui fonde cette référence. Ce cadre est de plus en plus caché dans l'enseignement actuel notamment du fait de l'apparition des logiciels mais aussi à la suite de la perte de vigilance épistémologique que la communauté mathématique savante n'assure plus.

2.2. Le niveau cognitif

La géométrie enseignée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine. Ainsi, il est essentiel de comprendre comment des communautés d'individus mais aussi des individus particuliers utilisent et s'approprient les connaissances géométriques dans leur pratique de la discipline. Cela nous a conduit à introduire un deuxième niveau centré sur l'articulation cognitive des composantes de l'ETG.

L'ouverture sur le champ cognitif que nous proposons, va se faire en étroite relation avec le niveau épistémologique et les composantes que nous avons introduites. Pour ce faire, nous avons pu nous appuyer sur les travaux de Gonseth (1945-1952) et de Duval (1995). De Duval, nous avons adapté l'idée de trois processus cognitifs impliqués dans l'activité géométrique.

- Un processus de visualisation en relation avec la représentation de l'espace et le support matériel ;
- un processus de construction déterminé par les instruments utilisés (règles, compas, *etc*.) et les configurations géométriques ;
- un processus discursif qui produit des argumentations et des preuves.

Nous devons à Gonseth l'idée de concevoir la géométrie comme une synthèse entre différents modes de connaissance de l'espace sur lesquels le sujet pourra s'appuyer à un moment donné : l'intuition, l'expérience et la déduction (Houdement & Kuzniak, 1999).

L'espace réel sera plus particulièrement lié à la visualisation par l'intuition, les artefacts à la construction par l'expérience, le modèle théorique à la notion de preuve par la déduction. Cela nous conduit à une première organisation que nous schématiserons ainsi.

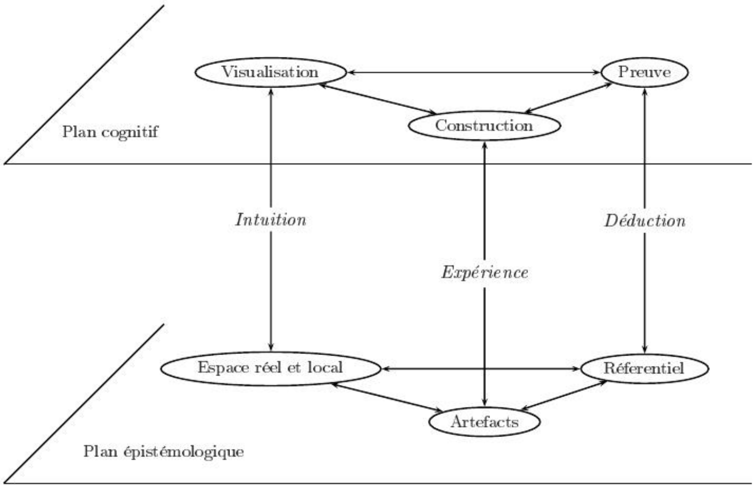

Figure 1 : L'espace de travail géométrique.

3. Décrire et construire l'Espace de Travail Géométrique

3.1. Différents niveaux d'ETG

Dans une institution scolaire donnée, la résolution d'un problème géométrique suppose qu'un ETG que nous qualifierons d'idoine, a pu être organisé pour permettre à un élève de s'engager dans la résolution du problème. Cet ETG idoine doit nécessairement remplir deux conditions, d'une part, il doit permettre de travailler dans le paradigme géométrique correspondant à la problématique visée, d'autre part, il est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide. Son utilisateur-concepteur est un expert idéal qui joue ici un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous avons appelé un ETG personnel. Le travail mathématique dans un cadre scolaire peut être décrit grâce à ces trois niveaux d'ETG. La géométrie visée par l'institution est décrite dans les ETG de référence. Ces derniers doivent être aménagés en ETG idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes où chaque élève travaille dans son ETG personnel.

3.2. Les différentes genèses de l'espace de travail géométrique personnel

3.2.1. Un double point de vue sur les genèses

L'appropriation du travail géométrique se fait graduellement et passe par la mise en place progressive d'un ETG. La genèse globale de l'ETG suppose un ensemble de genèses qui ne sont pas indépendantes et sont en relation avec les composantes de l'espace de travail géométrique ou certains des processus cognitifs indispensables à son fonctionnement. L'activation et le contrôle de ces genèses peut être conçu au niveau des enseignants (niveau idoine) ou en amont (niveau de référence). Nous allons examiner des entrées possibles dans le travail géométrique en précisant à chaque fois les genèses qu'elles mettent en jeu.

3.2.2. L'entrée perceptive ou la question de la visualisation : genèse figurale

La question de la visualisation est revenue récemment au premier plan des préoccupations en mathématique et en didactique après ce qu'il faut bien appeler une longue période d'ostracisme et d'élimination pour cause de suspicion. En effet, au XIX^{e} siècle, les cas exceptionnels qui avaient été jusqu'alors négligés, devinrent des objets d'études et de contre-exemples pour la mise en place de théories générales. Cette apparition des monstres dans l'horizon mathématique a conduit à remettre en cause la trop grande évidence apportée par les images notamment dans le cas de l'analyse. Dès le début du XX^{e}, une remise en perspective du rôle des images s'est opérée dans certains domaines mathématiques et, par exemple, des courbes ont pu être introduites pour comprendre de manière géométrique certains théorèmes en apparence étrange comme le fait qu'une fonction pouvait être partout continue et n'être dérivable en aucun point. Aujourd'hui, grâce aux outils informatiques et vidéos, la notion de preuve peut s'articuler assez rapidement à la visualisation et il est des approches didactiques qui insistent sur la mise en œuvre de ce type de preuves par l'image basées sur des éléments visuels sans aucun commentaire (Casselman, 2000).

Dans la géométrie enseignée à l'école obligatoire, les figures sont les supports visuels privilégiés du travail géométrique ce qui nous a conduit, de manière un peu restrictive, à introduire la genèse figurale dans le cadre des ETG pour décrire le processus sémiotique qui est associé à la pensée visuelle et qui s'opère en géométrie.

3.2.3. L'entrée expérimentale et la place des artefacts : genèse instrumentale

Le regard porté sur les instruments traditionnels de construction et de mesure dépend du paradigme en jeu et classiquement ces instruments permettaient essentiellement de vérifier ou d'illustrer les propriétés des objets étudiés. L'arrivée des outils informatiques a complètement renouvelé la question de la place des instruments dans l'activité mathématique en facilitant leur emploi et offrant la possibilité de réaliser des preuves dynamiques. Cet aspect est lié à la question de la preuve évoquée dans le paragraphe précédant mais s'y ajoute une dimension procédurale qui accroît encore plus la force de la preuve par des images animées quand le seul recours à la perception statique était insuffisant pour convaincre. Ainsi des petits films montrent des découpages pour effectuer des preuves du théorème de Pythagore ou permettent des réalisations d'expériences très complexes sans l'outil informatique comme le retournement d'une sphère. Cette mise en œuvre dynamique crée un « discours » explicatif complémentaire du seul texte écrit longtemps privilégié, au moins dans la tradition occidentale.
La genèse instrumentale repose sur des outils dont l'usage n'est pas transparent et immédiat. Il nécessite un certain nombre de processus qui ont pu être décrit dans l'approche instrumentale (Artigue, 2002)

3.2.4. L'entrée probatoire ou la question de l'inférence et du langage : genèse discursive du raisonnement

Le processus de géométrisation qui associe des formes géométriques aux concepts mathématiques est au cœur de l'acte de compréhension des mathématiques (Thom, 1995) et nous avons vu la force de certaines images ou de certaines expériences pour acquérir ou renforcer la certitude sur la validité d'un résultat annoncé. Cependant, comment s'assurer qu'un étudiant a compris la logique d'une preuve lorsque celle-ci n'est pas exprimée avec des mots et repose sur des recompositions d'images qui peuvent n'être que des illusions ? Un discours d'explicitation est nécessaire et il devient indispensable pour argumenter et pour convaincre autrui. L'articulation entre visualisation et raisonnement suppose la création d'espaces de travail géométrique où le raisonnement s'appuie de manière explicite sur des diagrammes en une sorte de raisonnement diagrammatique où image et discours s'appuieraient l'un sur l'autre (Miller, 2007).

Naturellement, la nature et l'importance des formulations écrites diffèrent d'un paradigme à l'autre et dans les approches les plus axiomatiques, il est possible d'affirmer qu'un objet mathématique n'existe que dans et par sa définition. Cela n'est bien sûr pas aussi net dans l'approche empiriste où les objets mathématiques se constituent à partir d'une fréquentation de quelques objets plus ou moins prototypiques.

3.2.5. Quelle synthèse géométrique ?

Des modes d'approche différents du travail géométrique vont exister en fonction des genèses privilégiées et ils pourront induire des synthèses géométriques différentes en relation avec les paradigmes géométriques mais aussi avec les choix didactiques des professeurs et les compétences des d'élèves. Un de nos thèmes de recherches est de décrire et de caractériser les différents ETG que produisent ces entrées dans la géométrie. Duval (2005) a proposé une approche métaphorique qui rejoint nos préoccupations en utilisant des approches qu'il identifie comme celles du botaniste, de l'arpenteur, du constructeur et de l'inventeur-bricoleur.

En nous appuyant sur notre cadre théorique, (Chacon et Kuzniak, 2010) nous avons aussi décrit des parcours d'étudiants dans le cadre d'un enseignement utilisant les logiciels. Ces parcours peuvent être visualisés grâce au diagramme suivant qui résume notre conception évolutive et génétique de l'ETG.

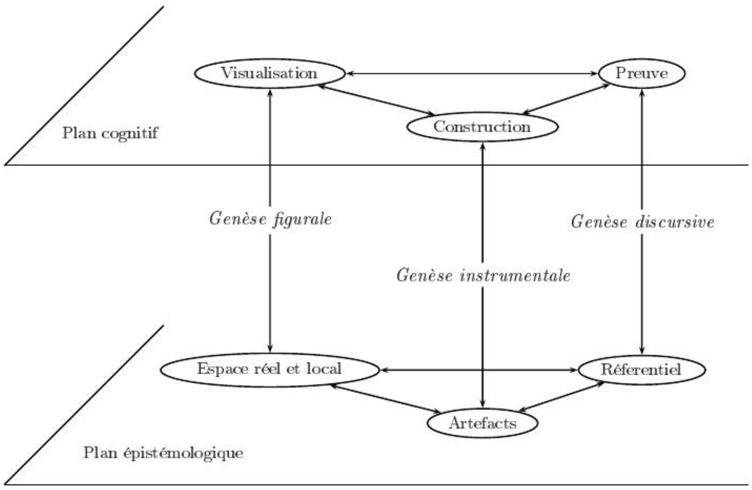

Figure 2 : Une approche génétique de l'ETG.

4. Fondements de l'Espace de Travail Mathématique

4.1. Niveaux épistémologique et cognitif

Les recherches engagées dans d'autres domaines mathématiques et présentées, pour certaines d'entre elles, dans cet ouvrage incitent à une réflexion sur ce que pourrait être un Espace de Travail Mathématique sans toute fois le déterminer de manière figée. Dans cette partie, je donnerai des éléments sur la transposition au travail mathématique général de la structure particulière retenue pour les ETG.

Tout d'abord, la définition même des ETG est très liée aux particularités de la géométrie. Certains éléments de l'ETG qui se rapportent à l'espace et à la figure ne semblent pas pouvoir se généraliser aux autres domaines comme les probabilités ou l'analyse où les enjeux majeurs portent soit sur le hasard ou la décision soit sur la variation, la continuité ou l'infini. Aussi, il faut bien comprendre que la proposition de structuration de l'ETM qui va suivre passe obligatoirement par une instanciation dans un domaine mathématique déterminé. Autrement dit, plus que la notion générale d'ETM, toute étude didactique suppose la description d'un Espace de Travail pour le domaine abordé. Le cadre des ETM se présente comme une coquille méthodologique sur laquelle il sera possible de s'appuyer pour développer de nouveaux Espaces de Travail spécifiques.

De notre étude des ETG, nous retenons l'idée d'articuler dans l'espace de travail deux niveaux, l'un de nature épistémologique en rapport étroit avec les contenus mathématiques du domaine étudié et l'autre de nature cognitive. Le travail mathématique est le résultat d'un processus progressif de genèse qui va permettre une articulation interne aux niveaux épistémologique et cognitif ainsi que l'articulation de ces deux niveaux.

4.2. La composante sémiotique

Si les artefacts et le référentiel théorique restent deux composantes de base de tout plan épistémologique associé à un domaine mathématique particulier, la composante liée à l'espace et aux configurations géométriques doit être modifiée. Dans le cas des ETG, cette composante est étroitement liée à la forme visible et concrète des objets propres de la géométrie. Pour étendre cette composante à d'autres domaines mathématiques et en accord avec une conception des mathématiques fondées sur des représentations sémiotiques, nous pensons pertinent d'introduire une notion de signe ou representamen au sens de Peirce. Rappelons (Eco, 2006) que le representamen ou signe est une chose qui représente une autre chose : son objet. L'intérêt de l'idée de representamen est qu'il peut être relié à l'objet sous des formes plus ou moins abstraites : icônes, indices et symboles.
Un signe renvoie à son objet de façon iconique lorsqu'il évoque son objet en vertu de sa ressemblance mais aussi du fait que ses propriétés intrinsèques correspondent d'une certaine façon aux propriétés de l'objet (Eco, p. 63). Il renvoie à son objet de manière indicielle lorsqu'il entretient un rapport physique avec l'objet qu'il représente comme un coup frappé à la porte est l'indice d'une visite ou le symptôme d'une maladie est l'indice de cette maladie. Un signe est un symbole lorsqu'il renvoie à son objet en vertu de règles. Ces dernières peuvent avoir été formulées *a priori*, par convention, ou s'être constituée *a posteriori*, par fréquentation et habitude culturelle.

Les mathématiques sont généralement concernées par le niveau symbolique mais dans l'apprentissage et dans une conception empirique des mathématiques, certains signes peuvent avoir une signification de type iconique ou indicielle. C'est, par exemple, le cas des figures en géométrie ou des dés en probabilités. D'autre part, ces signes vont se constituer en registres de représentation sémiotique pour permettre un travail qu'on pourra qualifier de mathématique. Dans ce processus, les signes peuvent acquérir des significations différentes en fonction du niveau de leur utilisateur comme dans le cas des formules algébriques qui synthétisent les relations entre objets et prennent un sens iconique pour l'utilisateur expert. Ces différents niveaux de relations avec l'objet renvoient à des distinctions sur les paradigmes utilisés : empirique, protoaxiomatique ou formel axiomatique.

4.3. Un point de vue génétique sur le travail mathématique

Pour décrire le niveau cognitif de l'ETM, nous retiendrons un processus cognitif en rapport avec l'importance que nous accordons aux signes et aux représentations dans la constitution du travail mathématique. Si nous pouvons clairement conserver les notions de preuve et de construction, le processus de visualisation nécessite une ré-interprétation fondamentale pour trouver sa place dans l'ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d'usage sur les signes dont rien ne prouve *a priori* qu'ils relèvent tous de la visualisation même dans une conception étendue de celle-ci.

Dans une première approche de la question, nous proposons le diagramme suivant pour décrire notre conception de l'ETM.

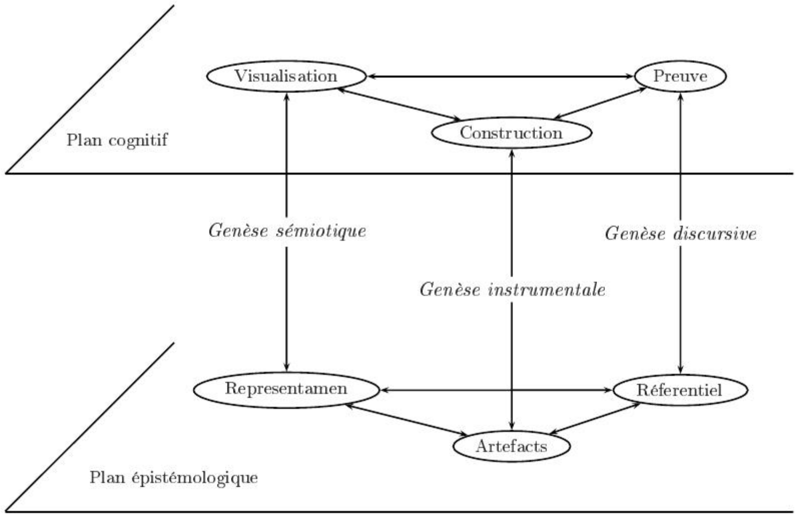

Figure 3 : L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses.

Nous avons introduit l'idée d'une genèse sémiotique associée aux représentations des objets mathématiques. Nous conservons le terme de visualisation qui devra être étroitement associé à l'intuition et aux schèmes opératoires sur les signes et les représentations.

Conclusion : vers une étude des Espaces de Travail Mathématique

Notre présentation de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) à partir de différentes genèses visait à mieux le définir et aussi à en préciser la portée exacte dans le champ de la didactique des mathématiques.

Une première genèse, interne à nos travaux en didactique, concerne le passage de la notion initiale d'ETG circonscrite à la géométrie à celle plus générale d'ETM. Autour de la notion centrale de travail, l'ETG articule les notions de travail géométrique et d'espace de travail. D'un côté, la première s'attache aux spécificités induites sur le travail par les contenus et la seconde définit la structure d'accueil qui permet ce travail particulier. Grâce à l'espace de travail, il est possible d'introduire trois regards sur le travail mathématique qui porteront sur le dispositif matériel avec ses constituants, l'organisation de cet espace par ses concepteurs et les représentations que s'en font les utilisateurs.

Les genèses épistémologique et cognitive vont structurer l'ETM en deux niveaux et aider à comprendre le jeu existant au sein de l'ETM.

- La genèse épistémologique permet de structurer l'organisation mathématique de l'ETM en lui donnant un sens que dans le cas de la géométrie les paradigmes géométriques aident à définir ;
- la genèse cognitive structure l'espace de travail quand il est donné à utiliser par un individu générique ou particulier. Là encore, l'exemple de la géométrie attire l'attention sur certains processus cognitifs comme la visualisation, la construction et le raisonnement discursif qui ont déjà montré leur importance dans le cadre des ETG.

Comment alors articuler de manière opératoire les deux niveaux épistémologiques et cognitifs afin de réaliser le travail mathématique attendu ? Il nous apparaît possible d'introduire trois genèses fondamentales étroitement liées au cadre théorique développé.

- Une genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une genèse sémiotique basée sur les registres de représentation sémiotiques qui assure aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;

- une genèse discursive de la preuve qui va donner un sens aux propriétés pour les mettre au service du raisonnement mathématique.

L'approfondissement de la structure des ETM passe par des études ponctuelles du type de celles que nous avons réalisées en géométrie. Cette étude systématique des ETM devrait pouvoir s'appuyer sur différents outils qui ont été utilisés dans le cadre des ETG. Ces outils doivent notamment permettre :

- la description et la différenciation des ETM en tant que ETM de référence, idoine ou personnel ;
- la description des enjeux épistémologiques et didactiques propres à chaque domaine mathématique en relation avec une approche par paradigmes ;
- la description et le développement des différentes genèses à l'œuvre dans l'élaboration du travail mathématique ;
- la prise en compte de l'influence du contexte social et des interactions sur la constitution et l'évolution des ETM.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (2002), Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7(3)**, 245–274.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 77–125.

BROUSSEAU, G. (2002), Cadres, jeux de cadres et théories des situations. *Actes de la journée Douady*, 73–82, Irem. Université Paris-Diderot.

CASSELMAN, B. (2000), Pictures and Proof, *Notices of the AMS Nov 2000 1257-1266*.

CHACON, I. & KUZNIAK, A. (2010), Les Espaces de Travail géométrique en contextes de connaissances technologiques et professionnelles, *Communication soumise au Symposium Franco-Chypriote de didactique, Paris.*

DESANTI, J.T. (1975), Qu'est ce qu'un problème épistémologique ? *La philosophie silencieuse*, 110–132, Le Seuil, Paris.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5–31.

DUVAL, R. (1995), Why to teach geometry, *Icmi Studies on Geometry*, Catania.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–54.

ECO, U. (1988), *Le signe. Introduction à un concept et à son histoire*, Bruxelles : Labor.

GIAQUINTO, M. (2005), Mathematical activity in *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics*, 75–87 Springer.

GRANGER, G.G. (1963), *Essai d'une philosophie du style*, Paris, Armand Colin rééd. Odile Jacob, 1987.

GONSETH, F. (1945-1955), La géométrie et le problème de l'espace, Éditions du Griffon, Lausanne.

HACKING, I. (2002/2003), Des styles de raisonnements scientifiques. Résumés des cours. http://www.college-de-france.fr/media/ins_pro/UPL35835_ihackingres0203.pdf.

HADAMARD, J. (1908), *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, rééd Paris, Gabay 2007.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999), Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics*, **40/3**, 283–312.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, ***6*(2)**, 167–188.

KUZNIAK, A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **15**.

LAUTIER, F. (1999), *Ergotopiques, Sur les espaces des lieux de travail*, Toulouse : Edition Octarès.

MILLER, N. (2007), *Euclid and his Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*, Stanford: CLSI Publications.

REICHENBACH, H. (1938), *Experience and Prediction*, Chicago: University of Chicago Press.

ROBERT, A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, in *Vandebrouck (ed). La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octares.

THURSTON, W. P. (1995), On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **15(1)**, 29–35.

Alain KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
kuzniak@math.jussieu.fr